Blanlœil, V. and Saeki, O.
Osaka J. Math.
42 (2005), 751–765

COBORDISME DES SURFACES PLONGÉES DANS S^4

Cet article est dedié au Professeur Yukio Matsumoto à l'occasion
de son 60ième anniversaire

VINCENT BLANLŒIL and OSAMU SAEKI

(Received May 11, 2004)

Abstract

We show that a closed connected surface embedded in $S^4 = \partial B^5$ bounds a handlebody of dimension 3 embedded in B^5 if and only if the Euler number of its normal bundle vanishes. Using this characterization, we show that two closed connected surfaces embedded in S^4 are cobordant if and only if they are abstractly diffeomorphic to each other and the Euler numbers of their normal bundles coincide. As an application, we show that a given Heegaard decomposition of a 3-manifold can be realized in S^5. We also give a new proof of Rohlin's theorem on embeddings of 3-manifolds into $\mathbf{R}^5$.

1. Introduction

L'ensemble des classes de cobordisme orienté des n-sphères plongées dans S^{n+2} forme un groupe avec la somme connexe comme opération. Dans [19] Kervaire a montré que ce groupe est trivial pour n pair, c'est-à-dire qu'une telle n-sphère borde toujours une boule de dimension $n+1$ plongée dans la boule B^{n+3} de dimension $n+3$. En particulier, toute 2-sphère plongée dans S^4 borde B^3 plongée dans B^5.

Nous étudions ici le cobordisme des surfaces compactes sans bord plongées dans S^4. Par analogie à la définition classique du cobordisme des nœuds, nous définissons

DÉFINITION 1.1. Soient M_0 et M_1 deux surfaces plongées dans S^4 qui sont difféomorphes à la même surface compacte sans bord Σ abstraitement. On fixe une orientation de la sphère S^4 et la sphère avec l'orientation inverse est notée par $-S^4$. On dit que M_0 et M_1 sont *cobordantes* s'il existe une sous-variété propre X de $S^4 \times [0, 1]$ telle que

(1) X est difféomorphe à $\Sigma \times [0, 1]$,

(2) $\partial X = (M_0^! \times \{0\}) \cup (M_1 \times \{1\})$,

où $M_0^!$ désigne le miroir de M_0 et les variétés $\partial(S^4 \times [0, 1]) = (-S^4 \times \{0\}) \cup (S^4 \times \{1\})$ sont orientées.

Le second auteur souhaite remercier l'IRMA ainsi que l'Université Louis Pasteur de Strasbourg pour leur hospitalité durant la préparation de cet article.

Lorsque M_0 et M_1 sont orientées, alors on dit qu'elles sont *cobordantes orientées* si elles sont cobordantes avec X orientée et $\partial X = (-M_0^! \times \{0\}) \cup (M_1 \times \{1\})$, où $-M_0^!$ désigne le miroir $M_0^!$ de M_0 avec l'orientation inverse.

Remarquons que cette relation de « cobordisme » est définie pour les sous-variétés de dimension 2 de S^4, et non pas pour les plongements. Dans le cas des plongements, la relation correspondante est appelée « concordance » (voir la Définition 3.4).

Dans cet article nous montrons d'abord qu'une surface compacte sans bord et connexe (orientable ou non-orientable) plongée dans S^4 est le bord d'un « handlebody » de dimension 3 plongé dans B^5 si et seulement si le nombre d'Euler du fibré normal est nul (c.f. Corollaire 2.5). En fait, nous définissons une structure Pin^- pour toute surface compacte sans bord plongée dans S^4 (voir le §2). Ensuite nous montrons que si le nombre d'Euler d'une telle surface connexe s'annule, alors pour chaque identification entre la surface et le bord d'un « handlebody » qui est compatible avec les structures Pin^-, il existe un plongement d'un « handlebody » dans B^5 dont la restriction sur le bord coïncide avec cette identification (c.f. Théorème 2.3).

L'idée de la démonstration est essentiellement la même que celle de Kervaire. Nous considérons une sous-variété V de S^4 qui admet la surface pour bord, ensuite nous faisons des chirurgies plongées sur V dans B^5. Pour cela, nous montrons qu'il existe un cobordisme Pin^- de dimension 4 avec bord qui se décompose en anses uniquement d'indice 2, entre la variété V munie de la structure Pin^- induite par l'unique structure Spin de S^4, et un « handlebody » de dimension 3 muni d'une structure Pin^-.

Comme corollaire du Théorème 2.3 nous obtenons alors un analogue du résultat de Kervaire, c'est-à-dire que deux surfaces (orientées) compactes sans bord et connexes sont cobordantes (orientées) si et seulement si elles sont difféomorphes abstraitement et les nombres d'Euler de leur fibré normal sont égaux (c.f. Corollaire 3.1). Nous en déduisons en particulier que le monoïde commutatif des classes de cobordisme des surfaces orientées, compactes sans bord et connexes plongées dans S^4, avec la somme connexe comme opération, est isomorphe au monoïde des entiers positifs (c.f. Remarque 3.2). Nous avons aussi des résultats correspondants dans le cas non-orientable et dans le cas non-orienté (c.f. Remarque 3.3). Nous étudierons aussi la différence entre cobordisme et concordance des surfaces, où la concordance est une notion de cobordisme définie pour les plongements (c.f. Définition 3.4).

Dans le §4, des résultats relatifs aux décompositions de Heegaard sont démontrés, et nous donnons une nouvelle démonstration du théorème de Rohlin [29] sur le plongement des variétés de dimension 3, orientables ou non-orientables, dans $\mathbf{R}^5$ (c.f. Corollaires 4.1, 4.2 et 4.3). Plus précisément, nous montrons que toute décomposition de Heegaard d'une variété de dimension 3 peut être réalisée par un plongement dans $S^5 = B^5 \cup_{S^4} B^5$ ayant une intersection transverse avec l'équateur $S^4 = \partial B^5$ tel que S^4 rencontre la variété plongée exactement le long de la surface de Heegaard. Nous montrons aussi que la surface plongée dans S^4 obtenue comme section de ce découpage peut être choisie à l'avance.

Les auteurs souhaitent remercier Susumu Hirose, Seiichi Kamada et Masamichi Takase pour des remarques utiles.

2. Surfaces dans S^4 qui bordent un « handlebody » dans B^5

Dans ce paragraphe nous donnons une caractérisation des surfaces compactes sans bord et connexes plongées dans $S^4 = \partial B^5$ qui bordent un « handlebody » de dimension 3 plongé dans B^5.

Soit M une surface compacte sans bord plongée dans S^4. D'abord nous définissons une structure Pin$^-$ sur M. Une structure Pin$^-$ sur une variété X est la classe d'homotopie d'une trivialisation de $TX \oplus \det TX \oplus \varepsilon^N$ au-dessus du 2-squelette, où TX est le fibré tangent de X, $\det TX$ est le fibré (en droite) d'orientation de X et ε^N est le fibré vectoriel trivial de dimension N suffisamment grande. Remarquons qu'une telle structure est équivalente à une structure Spin si X est orientable.

Comme M est caractéristique, i.e. M vue comme sous-variété de S^4 représente la classe d'homologie à coefficient $\mathbf{Z}_2$ duale à la seconde classe de Stiefel-Whitney de S^4, il existe une structure Spin sur $S^4 \setminus M$ et donc une trivialisation du fibré tangent stabilisé de S^4 au-dessus du 2-squelette de $S^4 \setminus M$ qui ne s'étend à aucun 2-disque transverse à M. Puisque $H^1(S^4; \mathbf{Z}_2) = 0$, une telle structure Spin est unique (c.f. [12, p.115] ou [22, Theorem 2.4]). Alors cette structure Spin sur $S^4 \setminus M$ induit une unique structure Pin$^-$ sur M (c.f. [6, Proposition 2] ou [22, Lemma 6.2]).

Pour $g \geq 0$, désignons par H_g le « handlebody » orientable de dimension 3 de genre g ; c'est-à-dire que H_g se décompose en une boule de dimension 3 à laquelle on a attaché g anses d'indice 1 orientables simultanément sur le bord de cette boule. De même nous désignons par I_g le « handlebody » non-orientable de dimension 3 avec g anses d'indice 1 non-orientables. Remarquons que le bord de H_g est la surface compacte sans bord orientable de genre g, notée par Σ_g, tandis que le bord de I_g est une surface compacte sans bord non-orientable de genre non-orientable $2g$, notée par N_{2g}. Dans ce qui suit, nous désignerons par K_g le « handlebody » H_g dans le cas orientable et I_g dans le cas non-orientable.

DÉFINITION 2.1. Soit M une surface compacte sans bord et connexe plongée dans S^4. On suppose que la surface M plongée dans S^4 est connexe de genre g si elle est orientable, ou bien de genre non-orientable $2g$ si elle est non-orientable. Soit $\psi : \partial K_g \to M$ un difféomorphisme. On dit que ψ est Pin$^-$ *compatible* si la structure Pin$^-$ sur ∂K_g induite par ψ s'étend sur K_g.

Dans ce qui suit, on suppose que la sphère S^4 est orientée. Pour une surface compacte sans bord et connexe M plongée dans S^4, désignons par $e(M) \in \mathbf{Z}$ le nombre d'Euler du fibré normal à M dans S^4. Remarquons que $e(M)$ est toujours nul si M est orientable, par contre si M est non-orientable alors $e(M)$ peut être non-nul. D'après la congruence de Whitney [36] nous avons $e(M) \equiv 2g(M)$ (mod 4), où $g(M)$ désigne le genre non-orientable de M. Donc en particulier, si $e(M) = 0$, alors $g = g(M)$ est pair et M borde abstraitement le « handlebody » non-orientable $I_{g/2}$.

REMARQUE 2.2. En fait, si M est une surface non-orientable, compacte sans bord et connexe de genre non-orientable g plongée dans S^4, alors on a

$$e(M) \in \{-2g, 4-2g, 8-2g, \dots, 2g\}$$

(c.f. [25, 18, 36]). Réciproquement, tout entier dans l'ensemble ci-dessus peut être réalisé comme le nombre d'Euler du fibré normal d'une telle surface plongée dans S^4 (voir la construction dans la Remarque 3.3 du §3).

Si M est orientable il existe toujours une sous-variété V orientable, compacte et connexe de dimension 3 de S^4 telle que $\partial V = M$ (voir, par exemple, [7, 8], [5, Lemma 2.2], [2]). On appelle une telle variété V *hypersurface de Seifert* de M. Dans le cas où M est non-orientable, une hypersurface de Seifert V (non-orientable) existe si et seulement si $e(M) = 0$ (c.f. [9, p.67] ou [18]).

Pour une hypersurface de Seifert V, l'unique structure Spin sur S^4 induit une structure Pin^- sur V (c.f. [6, Proposition 1]). Remarquons que cette structure induit sur le bord la structure Pin^- sur M définie précédemment au début de ce paragraphe (c.f. [6, §2]).

Théorème 2.3. *Soit M une surface compacte sans bord et connexe plongée dans $S^4 = \partial B^5$ et soit $\psi : \partial K_g \to M$ un difféomorphisme, où K_g est le « handlebody » de dimension 3 avec g anses d'indice 1. Alors il existe un plongement $\widetilde{\psi} : K_g \to B^5$ dont la restriction sur le bord coïncide avec ψ si et seulement si $e(M) = 0$ et ψ est Pin^- compatible.*

Démonstration. D'abord supposons qu'il existe un plongement $\widetilde{\psi}$ comme dans le théorème et soit U son image. On peut supposer que U est transverse à ∂B^5.

Si M est orientable, on a $e(M) = 0$. Si M est non-orientable, le fibré ν normal à U dans B^5 a pour classe d'orientation celle de U. Donc la classe d'Euler e_M du fibré normal à M dans S^4 est la restriction à M de la classe d'Euler e_U de ν, où les classes d'Euler sont considérées comme éléments des cohomologies à coefficients tordus. D'où les égalités

$$e(M) = \langle e_M, [M]\rangle = \langle e_U, i_*[M]\rangle = 0,$$

où $[M]$ est la classe fondamentale de M et $i : M \to U$ est l'inclusion.

Comme $e(M)$ s'annule, une hypersurface de Seifert V pour M existe. Considérons la variété compacte sans bord $\hat{V} = V \cup U$ de dimension 3 plongée dans B^5. Alors comme pour $M \subset S^4$, on peut munir $\hat{V}$ d'une structure Pin^-, celle-ci induit la structure Pin^- sur V définie ci-dessus (c.f. [6, §2]). Ainsi la structure Pin^- sur M s'étend sur U, et le difféomorphisme ψ est Pin^- compatible.

Réciproquement supposons $e(M) = 0$ et que le difféomorphisme ψ est Pin^- compatible. Considérons la variété (abstraite) $\widetilde{V} = V \cup_\psi K_g$ obtenue en collant V et K_g le long de leur bord par ψ ; cette variété $\widetilde{V}$ est compacte sans bord et connexe de dimension 3, et elle est orientable si M l'est. De plus comme ψ est Pin^- compatible, $\widetilde{V}$ admet une structure Pin^- dont la restriction sur V coïncide avec la structure Pin^- définie ci-dessus.

Lemme 2.4. *Il existe une variété* Pin^- *compacte* W *de dimension* 4 *obtenue à partir de* $V \times [0, 1]$ *en lui attachant des anses d'indice* 2 *le long de* $V \times \{1\}$ *telle que* $\partial W = \widetilde{V}$ *en tant que variétés* Pin^-*, où* $V \times \{0\}$ *est identifiée avec* $V \subset \widetilde{V}$.

Remarquons que W est orientable si M l'est.

Démonstration. Rappelons que le groupe de cobordisme Ω_3^{Spin} des variétés Spin de dimension 3 est nul (voir, par exemple, [28], [19, Lemme III.7, p.265], [12, p.91], [27] ou [21]). Donc dans le cas orientable, il existe une variété compacte orientable Spin W' de dimension 4 telle que $\partial W' = \widetilde{V}$ en tant que variétés Spin.

Le groupe de cobordisme $\Omega_3^{\mathrm{Pin}^-}$ des variétés Pin^- de dimension 3 est lui aussi nul (c.f. [1, 22, 23]). Donc dans le cas non-orientable, il existe une variété compacte Pin^- W' de dimension 4 telle que $\partial W' = \widetilde{V}$ en tant que variétés Pin^-.

Soit $C = \partial K_g \times [0, 1]$ le voisinage collier de ∂K_g dans K_g, où ∂K_g est identifié avec $\partial K_g \times \{0\}$. Posons $K'_g = \overline{K_g \setminus C}$. Soit $p_2 : \partial W' = (V \times \{0\}) \cup_\psi (\partial K_g \times [0, 1]) \cup (K'_g \times \{1\}) \to [0, 1]$ la projection sur le deuxième facteur. Alors il existe une fonction de Morse $f : W' \to [0, 1]$ prolongeant p_2 sans point critique d'indices 0 ou 4 telle que ses valeurs critiques soient dans $]\varepsilon, 1-\varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. On considère une décomposition en anses associée à cette fonction de Morse dont les anses d'indice 1 sont attachées à $V \times [0, \varepsilon]$ et les co-anses des anses d'indice 3 sont attachées à $K'_g \times [1 - \varepsilon, 1]$.

On considère les cercles unions des âmes (resp. co-âmes) des anses d'indice 1 (resp. 3) et d'arcs propres de $V \times [0, \varepsilon]$ (resp. $K'_g \times [1 - \varepsilon, 1]$). Dans le cas non-orientable, on choisit les arcs de telle manière que ces cercles conservent l'orientation de W'. Ceci est possible car V et $K'_g = I'_g$ sont non-orientables. Donc les voisinages de ces cercles sont munis des structures Spin induites par la structure Pin^- de W'. De plus on peut supposer que les cercles sont disjoints.

Maintenant on modifie W', en faisant des « chirurgies Spin » sur les cercles. D'après [34, §5], la variété Pin^- W ainsi construite a le même bord que W', et de plus W se décompose uniquement avec des anses d'indice 2. □

Revenons à la démonstration du Théorème 2.3. Comme les cercles où les anses d'indice 2 sont attachées préservent l'orientation de V, il existe un champ normal à

V dans S^4 le long des cercles. Donc par l'argument de Kervaire [19, Chapitre III, §3] (voir aussi [20]), on peut attacher les anses d'indice 2 de la décomposition de W ci-dessus dans B^5. Cela prouve que W se plonge dans B^5 de telle manière que $V \times \{0\}$ corresponde à $V \subset S^4$, et donc $\partial V = M$ est le bord du « handlebody » $K_g \subset \partial W$ plongé dans B^5. De plus l'identification entre ∂K_g et M est donnée par le difféomorphisme ψ. □

Corollaire 2.5. *Soit M une surface compacte sans bord et connexe plongée dans $S^4 = \partial B^5$. Alors il existe un « handlebody » de dimension 3 plongé dans B^5 dont le bord coïncide avec M si et seulement si $e(M) = 0$.*

Démonstration. D'après le Théorème 2.3, la nullité du nombre d'Euler du fibré normal est nécessaire. Réciproquement, supposons $e(M) = 0$. Dans le cas où M est non-orientable, par la congruence de Whitney [36], le genre non-orientable de M est pair, notons le $2g$. Dans le cas orientable, désignons par g le genre de M. Alors, par le Théorème 2.3, il suffit de montrer qu'il existe au moins un difféomorphisme $\psi : \partial K_g \to M$ qui est Pin^- compatible.

Pour cela, rappelons que l'ensemble des structures Pin^- sur la surface M est en bijection avec les formes quadratiques $H_1(M; \mathbf{Z}_2) \to \mathbf{Z}_4$ associées à la forme d'intersection modulo 2 de la surface (c.f. [22, Theorem 3.2] ou [4])[1]. D'après [22, Lemma 3.6], l'invariant de Brown, un élément de $\mathbf{Z}_8$, de cette forme quadratique[2] s'annule si et seulement si la surface Pin^- correspondante borde une variété Pin^- compacte de dimension 3. Donc l'invariant de Brown de la surface M munie de la structure Pin^- définie ci-dessus s'annule, puisque sa structure Pin^- est induite par celle d'une hypersurface de Seifert.

D'une part, on munit K_g d'une structure Pin^- quelconque, et alors la structure Pin^- induite sur le bord ∂K_g est aussi d'invariant de Brown nul.

D'autre part, une forme quadratique modulo 4 sur $H_1(M; \mathbf{Z}_2)$ associée à la forme d'intersection de M modulo 2 est déterminée par l'invariant de Brown à un automorphisme près (c.f. [12, pp.99–101]).

Le lemme suivant regroupe les résultats connus pour les surfaces orientables et non-orientables.

Lemme 2.6. *Soit M une surface compacte sans bord et connexe. Alors tout automorphisme de $H_1(M; \mathbf{Z}_2)$ qui préserve la forme d'intersection modulo 2 est réalisé par un difféomorphisme. En outre, si M est orientée, alors tout automorphisme est réalisé par un difféomorphisme qui préserve l'orientation.*

---

[1] Dans le cas orientable, ces formes se reduisent à des formes modulo 2.

[2] Dans le cas orientable, l'invariant de Brown se réduit à l'invariant de Arf et est considéré comme un élément de $\mathbf{Z}_2$.

Dans le cas orientable, le groupe des tels automorphismes est engendré par des transvections (c.f. [10, Chapter 3]). Comme chaque transvection est induite par un twist de Dehn, nous avons le lemme. Le cas non-orientable est démontré dans [26] (voir aussi [24]).

Avec ce lemme il existe toujours au moins un difféomorphisme $\psi : \partial K_g \to M$ qui est compatible avec les structures Pin^-, et ceci complète la démonstration du Corollaire 2.5. □

REMARQUE 2.7. Pour illustrer la condition de compatibilité par rapport aux structures Pin^- dans le Théorème 2.3, considérons par exemple le tore T trivialement plongé dans S^4, i.e. T est le bord du voisinage tubulaire $N = S^1 \times D^2$ d'un nœud trivial dans $S^3 \subset S^4$. Remarquons que $\overline{S^3 \setminus N}$ est difféomorphe à $D^2 \times S^1$. Posons $\mu = \{*\} \times \partial D^2 \subset T$ et $\lambda = S^1 \times \{*\} \subset T$. Alors le tore T ne borde dans B^5 aucune variété compacte H de dimension 3 telle que le générateur du noyau de l'homomorphisme $H_1(T; \mathbf{Z}_2) \to H_1(H; \mathbf{Z}_2)$ induit par l'inclusion soit engendré par la somme des classes representées par μ et λ, d'après [11, Lemme 1].

REMARQUE 2.8. Dans le Théorème 2.3, on peut remplacer le « handlebody » par n'importe quelle variété à bord de dimension 3 de la manière suivante.

Soit M une surface orientable (resp. non-orientable), compacte sans bord et connexe plongée dans S^4 avec $e(M) = 0$. Soit Z une variété orientable (resp. non-orientable) compacte et connexe de dimension 3 quelconque telle que ∂Z soit difféomorphe à M abstraitement. On dit qu'un difféomorphisme $\psi : \partial Z \to M$ est Pin^- *compatible* si la structure Pin^- sur ∂Z induite par ψ s'étend sur Z. Alors en utilisant le même argument que dans la démonstration du Théorème 2.3, on peut montrer que pour un difféomorphisme $\psi : \partial Z \to M$, il existe un plongement $Z \hookrightarrow B^5$ dont la restriction sur le bord ∂Z coïncide avec ψ si et seulement si ψ est Pin^- compatible.

REMARQUE 2.9. Nous pouvons comparer le Corollaire 2.5 dans le cas non-orientable avec le résultat de [15] suivant : une surface M non-orientable, compacte sans bord et connexe plongée dans S^4 borde un « handlebody » non-orientable plongé dans S^4 si et seulement si M est triviale (au sens de [15]) et $e(M) = 0$.

3. Cobordisme des surfaces plongées

Comme conséquence importante du Théorème 2.3 nous avons

Corollaire 3.1. *Soient M_0 et M_1 deux surfaces compactes sans bord et connexes plongées dans S^4. Alors elles sont cobordantes si et seulement si elles sont difféomorphes abstraitement et $e(M_0) = e(M_1)$. Dans le cas où elles sont orientées, elles sont cobordantes orientées si et seulement si elles ont même genre.*

Démonstration. Supposons que M_0 et M_1 sont cobordantes. Comme dans la démonstration du Théorème 2.3, on peut montrer $e(M_0) = e(M_1)$ et donc la nécessité est évidente. Pour montrer la suffisance, d'abord supposons que M_0 et M_1 sont orientées et de même genre g.

Soit B_N une petite boule de dimension 4 dans S^4 et notons la boule $\overline{S^4 \setminus B_N}$ par B_S. À isotopies près, on peut supposer que $M_0 \cap B_N = M_1 \cap B_N = \Delta$ est un 2-disque et que (B_N, Δ) est difféomorphe à la paire (B^4, B^2) standard. On peut aussi supposer que M_0 et M_1 induisent la même orientation sur Δ.

Dans ce qui suit, on considère M_i plongée dans $S^4 \times \{i\}$, $i = 0, 1$. On note $\Delta \times \{i\} \subset S^4 \times \{i\}$ par Δ_i, $i = 0, 1$. Notons

$$\widetilde{M} = \overline{M_0 \setminus \Delta_0} \cup (\partial\Delta \times [0, 1]) \cup \overline{M_1 \setminus \Delta_1}. \tag{3.1}$$

On munit $\widetilde{M}$ de l'orientation qui est compatible avec celles de $-M_0$ et M_1. La variété $\widetilde{M}$ est une surface orientée, compacte sans bord et connexe de genre $2g$ plongée dans $\partial(B_S \times [0, 1]) \cong S^4$. En fait, $\widetilde{M}$ correspond à la somme connexe de $-M_0^!$ et M_1. Remarquons que la structure Pin^- sur $\widetilde{M}$ est compatible avec celles de $-M_0^!$ et M_1.

Soit Σ_g la surface orientable, compacte sans bord et connexe de genre g et posons $\Sigma_g^0 = \Sigma_g \setminus \operatorname{Int} B^2$. Remarquons que $F = \Sigma_g^0 \times [0, 1]$ est difféomorphe à H_{2g} et que

$$\partial F = \left(\Sigma_g^0 \times \{0\}\right) \cup \left(\partial\Sigma_g^0 \times [0, 1]\right) \cup \left(\Sigma_g^0 \times \{1\}\right).$$

Comme le groupe des difféomorphismes (qui préservent l'orientation) d'une surface orientable agit transitivement sur les structures Pin^- d'invariant de Brown nul (voir la démonstration du Corollaire 2.5)[3], il existe un difféomorphisme $\varphi : M_0 \to M_1$ qui est compatible avec les orientations et les structures Pin^-, et tel que $\varphi(\Delta_0) = \Delta_1$. En particulier, il existe un difféomorphisme $\partial H_{2g} \cong \partial F \to \widetilde{M}$ Pin^- compatible tel que $\Sigma_g^0 \times \{i\}$ corresponde à $\overline{M_i \setminus \Delta_i}$, $i = 0, 1$. Ainsi par le Théorème 2.3, il existe un plongement de F dans $B_S \times [0, 1]$ tel que $\Sigma_g^0 \times \{i\} \subset \partial F$ corresponde à $\overline{M_i \setminus \Delta_i} \subset \widetilde{M}$, $i = 0, 1$, et tel que $\partial\Sigma_g^0 \times \{t\} \subset \partial F$ corresponde à $\partial\Delta \times \{t\} \subset \widetilde{M}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Finalement l'union de l'image du plongement de F dans $B_S \times [0, 1]$ et $\Delta \times [0, 1]$ donne le cobordisme orienté désiré entre M_0 et M_1.

Maintenant, considérons le cas non-orientable. Supposons que $e(M_0) = e(M_1)$ et que M_0 et M_1 ont même genre non-orientable g. Comme dans le cas orientable, considérons la surface $\widetilde{M}$ définie par (3.1). La variété $\widetilde{M}$ est une surface non-orientable, compacte sans bord et connexe de genre non-orientable $2g$ plongée dans $\partial(B_S \times [0, 1]) \cong S^4$ qui correspond à la somme connexe de $M_0^!$ et M_1. Ainsi on a $e(\widetilde{M}) = -e(M_0) + e(M_1) = 0$.

D'après [11], [12, p.98] ou [22, Theorem 6.3], le nombre d'Euler du fibré normal $e(M_i)$ coïncide avec $2\beta(q_i)$ modulo 16, où $\beta(q_i) \in \mathbf{Z}_8$ est l'invariant de Brown de la forme quadratique q_i associée à la surface Pin^- M_i, $i = 0, 1$, et $2 : \mathbf{Z}_8 \to \mathbf{Z}_{16}$ est

[3] Ces structures Pin^- correspondent exactement aux structures Spin d'invariant de Arf nul.

le monomorphisme défini par $1 \mapsto 2$. Donc comme $e(M_0) = e(M_1)$ les invariants de Brown de M_0 et de M_1 coïncident. Comme on a vu dans la démonstration du Corollaire 2.5 il existe un difféomorphisme entre M_0 et M_1 qui préserve les structures Pin$^-$. En particulier, il existe un difféomorphisme $\partial I_g \cong \partial F \to \widetilde{M}$ qui est Pin$^-$ compatible tel que $N_g^0 \times \{i\}$ corresponde à $\overline{M_i \setminus \Delta_i}$, $i = 0, 1$, où $N_g^0 = N_g \setminus \operatorname{Int} B^2$, $F = N_g^0 \times [0, 1]$ et N_g désigne la surface compacte sans bord et non-orientable de genre non-orientable g. Donc à l'aide du Théorème 2.3, on peut montrer que M_0 et M_1 sont cobordantes comme dans le cas orientable. $\square$

REMARQUE 3.2. Considérons l'ensemble de toutes les classes de cobordisme des surfaces orientées, compactes sans bord et connexes plongées dans S^4. Cet ensemble est muni d'une structure de monoïde commutatif avec la somme connexe orientée comme opération. De plus les résultats ci-dessus montrent que ce monoïde est isomorphe à celui des entiers positifs, où l'isomorphisme est donné par le genre de la surface plongée. Ce résultat est comparable à celui de Vogt [31, 32].

REMARQUE 3.3. Soit $\mathbf{R}P^2_+$ (ou $\mathbf{R}P^2_-$) le plan projectif trivialement plongé dans S^4 tel que $e(\mathbf{R}P^2_+) = 2$ (resp. $e(\mathbf{R}P^2_-) = -2$). Pour un couple (k, l) d'entiers positifs tels que $k + l \geq 1$, soit $N_{k,l}$ la surface plongée dans S^4 obtenue en faisant la somme connexe de k copies de $\mathbf{R}P^2_+$ et l copies de $\mathbf{R}P^2_-$. Remarquons d'abord que les surfaces $N_{k,l}$ donnent tous les « nœuds triviaux » au sens usuel (c.f. [15]), et ensuite que $e(N_{k,l}) = 2(k - l)$ et que le genre de $N_{k,l}$ est égal à $k + l$. Les résultats ci-dessus montrent donc que toute surface non-orientable, compacte sans bord et connexe plongée dans S^4 est cobordante à une et une seule $N_{k,l}$ pour certains entiers k et l. Ainsi les surfaces $N_{k,l}$ servent de représentants complets des classes de cobordisme.

Comme dans la Remarque 3.2 considérons l'ensemble de toutes les classes de cobordisme des surfaces non-orientables, compactes sans bord et connexes plongées dans S^4, où l'on rajoute la classe de cobordisme des 2-sphères plongées dans S^4. Cet ensemble est muni d'une structure de monoïde commutatif avec la somme connexe comme opération (l'ajout de la classe des nœuds sphériques permet d'avoir un élément neutre). Les résultats ci-dessus montrent que ce monoïde est isomorphe à celui des couples d'entiers positifs, et l'isomorphisme est donné par

$$[M] \mapsto \left(\frac{2g(M) + e(M)}{4}, \frac{2g(M) - e(M)}{4} \right),$$

où $[M]$ désigne la classe de cobordisme de la surface plongée M et $g(M)$ le genre de M.

Si l'on considère l'ensemble de toutes les classes de cobordisme des surfaces compactes sans bord (orientables ou non-orientables) et connexes plongées dans S^4, alors le monoïde correspondant est isomorphe au monoïde des classes de triplets

(j,k,l) d'entiers positifs, où la relation d'équivalence entre deux triplets est engendrée par

$$(j,k,l) \sim (0, k+j, l+j) \quad \text{pour} \quad k+l \geq 1.$$

Maintenant considérons les plongements des surfaces au lieux des sous-variétés de dimension 2 plongées dans S^4.

DÉFINITION 3.4. Soit Σ une surface compacte sans bord et soient $f_i : \Sigma \to S^4$, $i = 0, 1$, deux plongements. On dit que f_0 et f_1 sont *concordants* s'il existe un plongement propre $\Phi : \Sigma \times [0,1] \to S^4 \times [0,1]$ tel que $\Phi|_{\Sigma \times \{i\}} = f_i : \Sigma \times \{i\} \to S^4 \times \{i\}$, $i = 0, 1$.

Alors, comme corollaire du Théorème 2.3 on obtient

Corollaire 3.5. *Soit* Σ *une surface compacte sans bord et connexe. Alors deux plongements de* Σ *dans* S^4 *sont concordants si et seulement si les structures* Pin^- *induites par ces plongements coïncident et les nombres d'Euler du fibré normal sont égaux.*

Démonstration. La démonstration du Corollaire 3.1 implique la suffisance. Supposons maintenant que deux plongements $f_i : \Sigma \to S^4$, $i = 0, 1$, sont concordants. Soit s_i la structure Pin^- sur Σ induite par f_i, $i = 0, 1$. Alors comme dans la démonstration du Théorème 2.3 on peut montrer que $\Sigma \times [0,1]$ est muni d'une structure Pin^- qui induit les structures Pin^- s_i sur $\Sigma \times \{i\}$, $i = 0, 1$. Ainsi s_0 et s_1 coïncident. □

REMARQUE 3.6. Pour chaque $g \geq 1$, on peut construire deux plongements $f_i : \Sigma_g \to S^4$, $i = 0, 1$, qui ne sont pas concordants, où Σ_g désigne la surface compacte sans bord orientable de genre g. En fait, pour n'importe quel plongement $f_0 : \Sigma_g \to S^4$, on peut trouver un difféomorphisme $h : \Sigma_g \to \Sigma_g$ qui préserve l'orientation mais qui ne préserve pas la structure Pin^- induite par f_0. Alors f_0 et $f_1 = f_0 \circ h$ fournissent un tel exemple.

Rappelons que le groupe des difféomorphismes (qui préservent l'orientation) d'une surface orientée compacte sans bord agit transitivement sur les structures Pin^- d'invariant de Brown nul (voir la démonstration du Corollaire 2.5). Ceci implique que le nombre des classes de concordance des plongements d'une surface orientée compacte sans bord de genre g est donné par le nombre des structures Pin^- d'invariant de Brown nul sur cette surface[4]. Ce nombre, noté par Az_g, est donné par $Az_g = 2^{g-1}(2^g + 1)$ (c.f. [17, p.373]).

Ceci implique que les deux notions, cobordisme et concordance, sont essentielle-

[4]Ce nombre est égal au nombre des structures Spin d'invariant de Arf nul sur la surface.

β	g : impair	g : pair
0	0	$2^{(g-2)/2}(2^{(g-2)/2}+1)$
1	$2^{(g-3)/2}(2^{(g-1)/2}+1)$	0
2	0	2^{g-2}
3	$2^{(g-3)/2}(2^{(g-1)/2}-1)$	0
4	0	$2^{(g-2)/2}(2^{(g-2)/2}-1)$
5	$2^{(g-3)/2}(2^{(g-1)/2}-1)$	0
6	0	2^{g-2}
7	$2^{(g-3)/2}(2^{(g-1)/2}+1)$	0

Table 1. Le nombre des structures Pin^- sur N_g avec les invariants de Brown $\beta \in \mathbf{Z}_8$.

ment différentes pour les surfaces orientables de genre $g \geq 1$. Remarquons que pour $g = 0$, ces deux notions coïncident, puisque tout difféomorphisme de S^2 qui préserve l'orientation est isotope à l'identité (c.f. [30]).

REMARQUE 3.7. Comme dans la Remarque 3.6, on peut déterminer le nombre C_g des classes de concordance des plongements de N_g dans S^4, où N_g désigne la surface compacte sans bord et non-orientable de genre non-orientable g. En effet d'après la Remarque 2.2 on a

$$C_g = \sum_{i=0}^{g} C_{g,-2g+4i}$$

où $C_{g,e}$ désigne le nombre des classes de concordance des plongements de N_g dans S^4 tels que les nombres d'Euler de leur fibré normal sont égaux à e. De plus d'après le Corollaire 3.5 et [22, Theorem 6.3], $C_{g,-2g+4i}$ est égal au nombre des structures Pin^- sur N_g dont les invariants de Brown sont égaux à $-g+2i$ modulo 8. D'autre part, d'après [3] le nombre des structures Pin^- sur N_g dont les invariants de Brown sont égaux à β est donné par la Table 1. Ceci peut se résumer par la formule

$$C_g = \begin{cases} 2^{g-2}(g+1) & \text{si } g \text{ est impair,} \\ 2^{g-2}(g+1) + 2^{(g-2)/2} & \text{si } g \text{ est pair.} \end{cases}$$

REMARQUE 3.8. Soit Σ_g la surface orientée, compacte sans bord et connexe de genre $g \geq 0$. L'image $f(\Sigma_g)$ d'un plongement $f : \Sigma_g \to S^4$ est *triviale* si $f(\Sigma_g)$ borde un « handlebody » de dimension 3 de genre g plongé dans S^4 (c.f. [15]). En combinant notre résultat avec celui de Hirose [14], on obtient l'équivalence entre concordance et isotopie pour les plongements dont les images sont triviales. Plus précisément, pour un plongement $f_0 : \Sigma_g \to S^4$ dont l'image est triviale et un difféomorphisme $h : \Sigma_g \to \Sigma_g$ qui préserve l'orientation, les trois conditions ci-dessous sont équivalentes.

(1) Les plongements f_0 et $f_1 = f_0 \circ h$ sont isotopes.

(2) Les plongements f_0 et $f_1 = f_0 \circ h$ sont concordants.

(3) Le difféomorphisme h préserve la structure Pin^- induite par f_0.

Remarquons que si l'image du plongement f_0 n'est pas triviale, alors le même résultat n'est plus valable en général. En fait, pour certains tores plongés dans S^4, il existe des difféomorphismes du tore qui ne se prolongent pas à ceux de S^4 mais qui préservent la structure Pin^-, d'après [16, 13].

4. Applications

Nous présentons maintenant quelques applications du Théorème 2.3 au scindement de Heegaard des variétés de dimension 3.

Tout d'abord nous donnons un résultat qui permet une nouvelle démonstration du théorème de Rohlin [29] sur le plongement des variétés de dimension 3 dans $\mathbf{R}^5$ (voir aussi [12, p.90], [33] et [35]). Rappelons que pour toute variété de dimension 3 compacte sans bord P, il existe une décomposition de la forme $P = K_g^0 \cup K_g^1$, où K_g^i sont des copies du « handlebody » de dimension 3 avec g anses d'indice 1, $i = 0, 1$, et $K_g^0 \cap K_g^1 = \partial K_g^0 = \partial K_g^1$. Ce type de décomposition est applé une *décomposition de Heegaard de genre g* de P, et la surface $S = K_g^0 \cap K_g^1$ est applée la *surface de Heegaard associée*. Remarquons que S est difféomorphe à Σ_g si P est orientable, tandis que S est difféomorphe à N_{2g} si P est non-orientable.

Corollaire 4.1. *Soit P une variété orientable* (*resp. non-orientable*) *compacte sans bord et connexe de dimension* 3 *qui admet une décomposition de Heegaard de genre g, et soit S la surface de Heegaard associée. En outre soit M une surface orientable* (*resp. non-orientable*) *compacte sans bord et connexe de genre g* (*resp. de genre non-orientable* $2g$) *plongée dans S^4 avec $e(M) = 0$. Alors il existe un plongement $f : P \to S^5 = B^5 \cup_{S^4} B^5$ qui est transverse à l'équateur $S^4 = \partial B^5$, et tel que $f(S) = f(P) \cap S^4 = M$.*

Démonstration. Soit $P = K_g^0 \cup_\Psi K_g^1$ une décomposition de Heegaard de genre g de P et $\Psi : \partial K_g^1 \to \partial K_g^0$ un difféomorphisme de recollement. D'après [22, §2] par exemple, la variété P de dimension 3 admet une structure Pin^-. Fixons une telle structure sur P. Remarquons que la structure Pin^- induite sur la surface de Heegaard S est d'invariant de Brown nul. Donc il existe un difféomorphisme $\varphi : M \to S = \partial K_g^0$ qui est compatible avec leurs structures Pin^- (voir la démonstration du Corollaire 2.5). Remarquons aussi que le difféomorphisme Ψ est compatible avec les structures Pin^- induites sur K_g^0 et K_g^1.

Par le Théorème 2.3, il existe deux plongements $f_i : K_g^i \to B_i^5$, $i = 0, 1$, tels que $f_i(\partial K_g^i)$ coïncident avec M pour $i = 0, 1$, $f_0|_{\partial K_g^0} = \varphi^{-1}$ et $f_1|_{\partial K_g^1} = \varphi^{-1} \circ \Psi$, où B_i^5

sont des copies de B^5, $i = 0, 1$. Alors la composition $f_0^{-1} \circ f_1|_{\partial K_g^1}$ coïncide avec Ψ. En outre nous pouvons supposer que $f_i(K_g^i)$ est transverse à ∂B_i^5 et que $f_i(K_g^i) \cap \partial B_i^5 = f_i(\partial K_g^i)$, $i = 0, 1$. Ainsi le plongement obtenu en collant f_0 et f_1 le long du bord est le plongement f désiré de P dans $B_0^5 \cup_{S^4} B_1^5 = S^5$. □

Comme toute variété compacte sans bord de dimension 3 admet au moins une décomposition de Heegaard, on a

Corollaire 4.2 (Rohlin [29], Wall [33]). *Toute variété compacte sans bord de dimension* 3 *se plonge dans* $\mathbf{R}^5$.

On a aussi

Corollaire 4.3. *Soit P une variété compacte sans bord et connexe de dimension* 3 *qui admet une décomposition de Heegaard de genre g. Alors on peut plonger P dans $S^5 = B^5 \cup_{S^4} B^5$ de telle sorte que $P \cap S^4 = P \cap \partial B^5$ soit un « handlebody » de dimension* 3 *avec g anses de la décomposition de Heegaard.*

Démonstration. On modifie la démonstration du Corollaire 4.1 de la manière suivante. Considérons un « handlebody » K_g trivialement plongé dans S^4 et posons $M = \partial K_g$. On munit K_g de la structure Pin^- induite par celle de S^4. Il existe un difféomorphisme $\varphi' : K_g \to K_g^0$ qui est compatible avec les structures Pin^-, ceci parce que le groupe des difféomorphismes de K_g agit transitivement sur les structures Pin^-. Posons $\varphi = \varphi'|_M : M \to \partial K_g^0$. Alors le plongement obtenu en collant $(\varphi')^{-1} : K_g^0 \to K_g \subset S^4$ et $f_1 : K_g^1 \to B_1^5$ le long du bord est le plongement désiré de P dans $B_0^5 \cup_{S^4} B_1^5 = S^5$, où f_1 est le plongement construit comme dans la démonstration du Corollaire 4.1. □

REMARQUE 4.4. En appliquant la Remarque 2.8, on peut montrer l'affirmation suivante. Soit P une variété compacte sans bord et connexe de dimension 3 et $P = Z_0 \cup Z_1$ une décomposition en deux sous-variétés compactes et connexes de codimension 0 telle que $S = Z_0 \cap Z_1 = \partial Z_0 = \partial Z_1$ soit une surface connexe.

Pour un plongement $\psi : S \hookrightarrow S^4$, les deux conditions ci-dessous sont équivalentes.

(1) Il existe un plongement $\Psi : P \to S^5 = B_0^5 \cup_{S^4} B_1^5$ qui est transverse à l'équateur $S^4 = B_0^5 \cap B_1^5$ tel que $\Psi|_S = \psi$ et $\Psi^{-1}(B_i^5) = Z_i$, $i = 0, 1$.

(2) Le difféomorphisme $\psi : S \to \psi(S) = M$ est Pin^- compatible, i.e. la structure Pin^- induite par ψ sur S s'étend sur Z_0 et Z_1, et le nombre d'Euler du fibré normal de $M = \psi(S)$ est nul.

De plus, même si le difféomorphisme $\psi : S \to M$ n'est pas Pin^- compatible, on peut choisir un difféomorphisme $h : S \to S$ tel que $\psi \circ h$ soit Pin^- compatible.

Après que cet article ait été accepté pour publication, les auteurs ont été informés que le cas orientable du Corollarie 3.1 avait déjà été démontré par E. Ogasa (voir Theorem 5.1 de l'article "E. Ogasa : The intersection of three spheres in a sphere and a new application of the Sato-Levine invariant, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3109–3116"). La démonstration proposée par E. Ogasa est légèrement différente de la notre et quelques détails techniques y sont omis.

References

[1] D.W. Anderson, E.H. Brown, Jr. and F.P. Peterson: Pin *cobordism and related topics*, Comment. Math. Helv. **44** (1969), 462–468.

[2] J.S. Carter and M. Saito: *A Seifert algorithm for knotted surfaces*, Topology **36** (1997), 179–201.

[3] L. Dąbrowski and R. Percacci: *Diffeomorphisms, orientation, and pin structures in two dimensions*, J. Math. Phys. **29** (1988), 580–593.

[4] A. Degtyarev and S. Finashin: Pin-*structures on surfaces and quadratic forms*, Turkish J. Math. **21** (1997), 187–193.

[5] D. Erle: *Quadratische Formen als Invarianten von Einbettungen der Kodimension* 2, Topology **8** (1969), 99–114.

[6] S.M. Finashin: *A* Pin^-*-cobordism invariant and a generalization of the Rokhlin signature congruence* (en russe), Algebra i Analiz **2** (1990) 242–250; Traduction en anglais: Leningrad Math. J. **2** (1991), 917–924.

[7] H. Gluck: *Orientable surfaces in four-space*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 590–592.

[8] H. Gluck: *The embedding of two-spheres in the four-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 308–333.

[9] C.McA. Gordon and R.A. Litherland: *On the signature of a link*, Invent. Math. **47** (1978), 53–69.

[10] L.C. Grove: Classical Groups and Geometric Algebra, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2002.

[11] L. Guillou and A. Marin: *Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **285** (1977), A95–A98.

[12] L. Guillou and A. Marin: À la Recherche de la Topologie Perdue, Birkhäuser, Boston, 1986.

[13] S. Hirose: *On diffeomorphisms over* T^2*-knots*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 1009–1018.

[14] S. Hirose: *On diffeomorphisms over surfaces trivially embedded in the* 4*-sphere*, Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 791–824.

[15] F. Hosokawa and A. Kawauchi: *Proposals for unknotted surfaces in four-spaces*, Osaka J. Math. **16** (1979), 233–248.

[16] Z. Iwase: *Dehn surgery along a torus* T^2*-knot*. II, Japan. J. Math. **16** (1990), 171–196.

[17] D. Johnson: *Spin structures and quadratic forms on surfaces*, J. London Math. Soc. **22** (1980), 365–373.

[18] S. Kamada: *Nonorientable surfaces in* 4*-space*, Osaka J. Math. **26** (1989), 367–385.

[19] M.A. Kervaire: *Les nœuds de dimensions supérieures*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 225–271.

[20] M.A. Kervaire and J.W. Milnor: *Groups of homotopy spheres*. I, Ann. of Math. **77** (1963), 504–537.

[21] R.C. Kirby: The Topology of 4-manifolds, Lecture Notes in Mathematics, **1374**, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[22] R.C. Kirby and L.R. Taylor: Pin *structures on low-dimensional manifolds*; in Geometry of low-dimensional manifolds, 2 (Durham, 1989), London Math. Soc. Lecture Note Ser. **151**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, 177–242.

[23] R.C. Kirby and L.R. Taylor: *A calculation of* Pin^+ *bordism groups*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), 434–447.

[24] M. Korkmaz: *First homology group of mapping class groups of nonorientable surfaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **123** (1998), 487–499.

[25] W.S. Massey: *Proof of a conjecture of Whitney*, Pacific J. Math. **31** (1969), 143–156.

[26] J.D. McCarthy and U. Pinkall: *Representing homology automorphisms of nonorientable surfaces*, preprint, Max-Planck Inst., 1985.

[27] P. Melvin and W. Kazez: 3*-dimensional bordism*, Michigan Math. J. **36** (1989), 251–260.

[28] J. Milnor: *Spin structures on manifolds*, Enseignement Math. **9** (1963), 198–203.

[29] V.A. Rohlin: *The imbedding of non-orientable three-dimensional manifolds into a five-dimensional Euclidean space* (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR **160** (1965), 549–551; Traduction en anglais: Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 153–156.

[30] S. Smale: *Diffeomorphisms of the* 2*-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 621–626.

[31] R. Vogt: *Cobordismus von Knoten*; in Knot Theory (Proc. Sem., Plans-sur-Bex, 1977), Lecture Notes in Math. **685**, Springer-Verlag, Berlin, 1978, 218–226.

[32] R. Vogt: Cobordismus von hochzusammenhängenden Knoten, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, 1978, Bonner Mathematische Schriften, 116, Universität Bonn, Mathematisches Institut, Bonn, 1980.

[33] C.T.C. Wall: *All* 3*-manifolds imbed in* 5*-space*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 564–567.

[34] A.H. Wallace: *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. J. Math. **12** (1960), 503–528.

[35] S.C. Wang and Q. Zhou: *How to embed* 3*-manifolds into* 5*-space*, Adv. in Math. (China) **24** (1995), 309–312.

[36] H. Whitney: *On the topology of differentiable manifolds*; in Lectures in Topology, University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1941, 101–141.

Vincent Blanlœil
Département de Mathématiques
Université Louis Pasteur Strasbourg I
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg cedex, France
e-mail: blanloeil@math.u-strasbg.fr

Osamu Saeki
Faculty of Mathematics
Kyushu University
Hakozaki, Fukuoka 812-8581, Japan
e-mail: saeki@math.kyushu-u.ac.jp